Preuve de la fonction `tanh` de CORE-MATH (stage L3)

Lieu. INRIA/LORIA, Nancy, `www.loria.fr`.

Encadrants. Paul Zimmermann (Inria Nancy - Grand Est) et Guillaume Melquiond (Inria Lyon).

Contexte. Le standard IEEE 754 définit ce qu'on appelle l'« arrondi correct ». Étant donnés une fonction mathématique f et un nombre flottant x, l'arrondi correct de $f(x)$ est le nombre flottant le plus proche de $f(x)$ selon le mode d'arrondi donné (au plus proche, vers zéro, vers $-\infty$ ou vers $+\infty$). Si le standard IEEE 754 impose l'arrondi correct pour les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division) et la racine carrée, il ne fait que le recommander pour les fonctions mathématiques (exp, sin, pow). Les bibliothèques mathématiques couramment utilisées ne garantissent pas l'arrondi correct [2]. Le projet CORE-MATH [4] vise à produire des implantations avec arrondi correct, en vue d'une intégration dans ces bibliothèques mathématiques. Certaines fonctions de CORE-MATH ont déjà été intégrées à la bibliothèque GNU libc, d'autres sont pressenties pour l'être, donc s'assurer de leur correction est crucial. Cependant, la preuve des bornes d'erreur est très fastidieuse à la main, voir par exemple les preuves de [3]. Il est donc important de les mécaniser.

Objectif du stage. L'objectif du stage est de développer une méthodologie pour vérifier ce genre de code, et de l'appliquer pour prouver la correction de la fonction `tanh` de CORE-MATH, qui calcule la tangente hyperbolique en double précision, prétendument avec arrondi correct. Le code de cette fonction comporte deux branches principales. Pour $|x| \geq 0.25$, CORE-MATH utilise l'identité

$$\tanh(x) = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Pour $|x| < 0.25$, CORE-MATH utilise un polynôme minimax de degré 17, à savoir un polynôme qui approche au mieux la fonction à degré fixé. La particularité de ce genre de code est qu'une simple évaluation du polynôme en arithmétique à virgule flottante ne donne pas un résultat assez précis ; le code doit donc se livrer à des contorsions nombreuses et subtiles, ce qui complique sa preuve de correction. On s'intéressera plus particulièrement à cette branche ($|x| < 0.25$), et on pourra utiliser l'outil Gappa [1] pour prouver que les bornes d'erreur utilisées dans le code sont correctes. Si le temps le permet, on appliquera la méthodologie mise au point à d'autres fonctions de CORE-MATH.

Prérequis. Ce stage nécessite de solides connaissances mathématiques, ainsi qu'une bonne maîtrise du langage C.

Références

[1] de Dinechin, F., Lauter, C., and Melquiond, G. Certifying the floating-point implementation of an elementary function using Gappa. *Transactions on Computers 60*, 2 (2011), 242–253.

[2] Gladman, B., Innocente, V., Mather, J., and Zimmermann, P. Accuracy of mathematical functions in single, double, extended double and quadruple precision. https://members.loria.fr/PZimmermann/papers/accuracy.pdf, 2025. Version of August, 29 pages.

[3] Hubrecht, T., Jeannerod, C.-P., and Zimmermann, P. Towards a correctly-rounded and fast power function in binary64 arithmetic. In *2023 IEEE 30th Symposium on Computer Arithmetic (ARITH 2023)* (Portland, Oregon (USA), United States, 2023). https://inria.hal.science/hal-04326201.

[4] Sibidanov, A., Zimmermann, P., and Glondu, S. The CORE-MATH Project. In *ARITH 2022 - 29th IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (virtual, France, 2022). https://hal.inria.fr/hal-03721525.